

Ingeniería Informática

Examen de Cálculo Avanzado

1. Expresa la suma

$$\sum_{k=-N}^N (\cos(2k\pi t) + i \operatorname{sen}(2k\pi t))$$

como un cociente de senos.

2. Sea $N \geq 2$ un número natural. Definamos $\omega = e^{2i\pi/N}$ y

$$\omega_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(N-1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Prueba que los vectores $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}\}$ forman una base ortogonal de \mathbb{C}^N .

3. Sea $f(x) = x(1-x)$, ($0 \leq x \leq 1$) y consideremos la extensión impar de f de período 2.

a) Calcula la serie de Fourier seno de f .

b) Justifica que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{96}$.

c) Calcula la serie de Fourier coseno de $f'(x) = 1-2x$, ($0 \leq x \leq 1$); y la serie de Fourier de $f''(x) = -2$.

d) deduce de lo anterior que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

4. Justifica que $\sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2$. donde $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$ es la transformada de Fourier discreta de $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$.

5. En las siguientes ecuaciones, calcula un factor integrante adecuado (de la forma que se sugiere) para obtener ecuaciones diferenciales exactas. Resuelve luego las ecuaciones.

a) $(x+2y)dx - xdy = 0$ con un factor integrante $\mu = \mu(x)$.

b) $(3x^2 - t)dt + (2x^3 - 6xt)dx = 0$ con f.i. $\mu = \mu(t+x^2)$.

6. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' + 2x + 3y = 0 \\ 3x + y' + 2y = 2e^{2t} \end{cases}$$